Comment déterminer une fonction affine à partir deux images ?

Problème : Comment déterminer la fonction affine f telle que : f(4) = 5 et f(6) = 9 ?

1/ Prérequis : la formule des accroissements

Si a et b sont des nombres relatifs fixés et f est la fonction affine définie par $f(x) = ax + b$ alors

Pour deux nombres différents x_1 et x_2 , on a l'égalité :

$$a = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$$

2/ Résolution du problème :

Technique 1 : **Pour déterminer une fonction affine à partir de deux nombres et leurs images :**

1. On utilise la donnée « f est une fonction affine » c'est-à-dire f peut s'écrire sous la forme $f(x) = ax + b$
2. On détermine la valeur du **coefficient a** en appliquant la formule des accroissements.
3. On calcule b en utilisant une des deux images puis on conclut.

SOLUTION : notre fonction f est telle que f(4) = 5 et f(6) = 9 , trouvons sa formule :

1. f est une fonction affine donc f peut s'écrire sous la forme $f(x) = ax + b$

2. En appliquant la formule des accroissements : $\boldsymbol{a = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}}$

Donc $\boldsymbol{si\ x_1 = 4\ et\ \ x_2 = 6\ \ a = \frac{f(6)-f(4)}{6-4}}$

$$\boldsymbol{a = \frac{9-5}{2}}$$

$$\boldsymbol{a = \frac{4}{2}}$$

$$\boldsymbol{a = 2}$$

Donc on peut déjà écrire que : $f(x) = \mathbf{2}x + b$ et il reste b à déterminer.

3. **Pour déterminer b, on utilise soit que** $\boldsymbol{f(4) = 5\ ou\ que\ f(6) = 9}$

En utilisant que $f(4) = 5$ **, on peut écrire les égalités :**

f(4) = 2x4 + b = 5 ainsi on résout la petite équation 8 + b=5

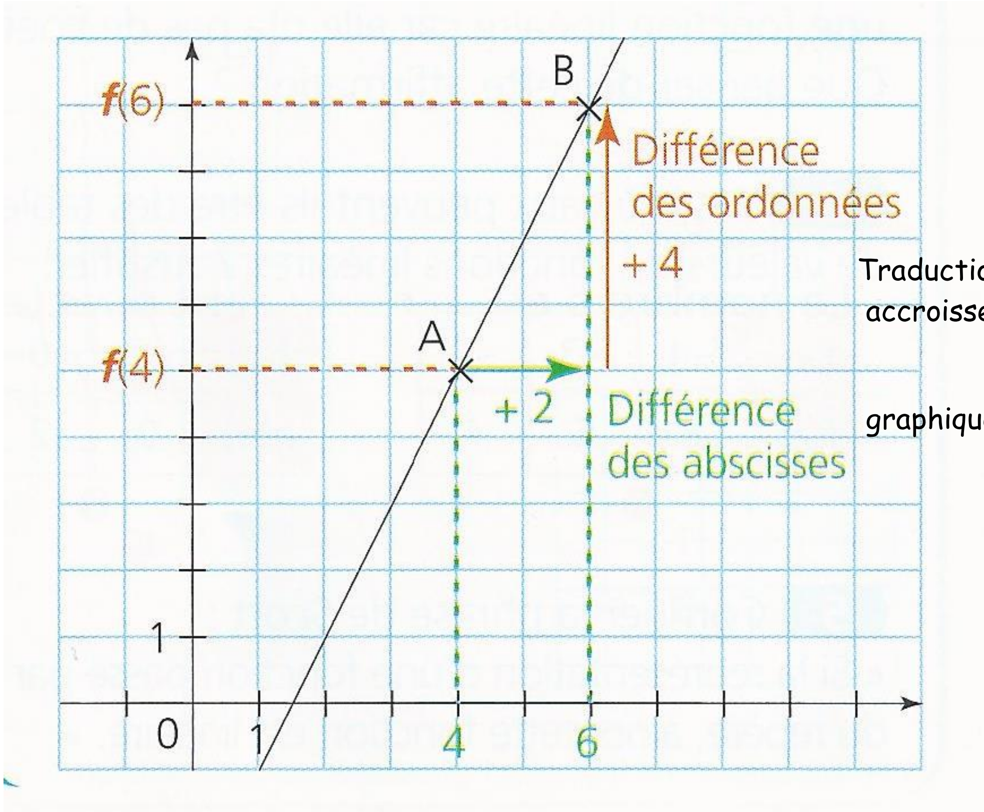
ainsi b = 5 - 8 donc b=-3

Conclusion :

Cette fonction affine telle que f(4)= 5 et f(6) = 9 a pour expression algébrique :

$$f(x) = \mathbf{2}x - 3$$

Remarque : On peut visualiser le coefficient a de cette fonction sur la représentation graphique de f :



Traduction de la formule des accroissements sur la représentation graphique : $\boxed{a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4}{2} = 2}$

A vous : déterminer la fonction affine f telle que : f(1) = -1 et f(3) = 5 ?

Correction : f(1) = -1   et   f(3) = 5

$x_1 = 1 \; et \;\; x_2 = 3 \;\; a = \frac{f(3)-f(1)}{3-1}$

$a = \frac{5-(-1)}{2}$

$a = \frac{6}{2}$

$a = 3$

Donc on peut déjà écrire que : $f(x) = 3x + b$ et il reste b à déterminer.

4. Pour déterminer b, on utilise soit que $f(1) = -1 \; ou \; que \; f(3) = 5$

En utilisant que $f(3) = 5$ **, on peut écrire les égalités :**

f(3) = 3x3 + b = 5 ainsi on résout la petite équation 9 + b = 5

ainsi b = 5 - 9 donc b=-4

Conclusion :

Cette fonction affine telle que f(1)= -1 et f(3) = 5   a pour expression algébrique :

$$f(x) = 3x - 4$$

Faire l'exercice 31 page 126

Déterminer la fonction affine g telle que g(-1) = 3 et g(3) = 1

1. Calculer a
2. Calculer b
3. En déduire l'expression algébrique de g

Correction : $g(x) = ax + b$ et g(-1) = 3 et g(3) = 1

1. Calcul de a

Donc $\boldsymbol{ici\ \ x_1 = -1\ et\ \ x_2 = 3}$ $\boldsymbol{a = \frac{g(3)-g(-1)}{3-(-1)}}$

$$\boldsymbol{a = \frac{1-3}{4}}$$

$$\boldsymbol{a = \frac{-2}{4}}$$

$$\boldsymbol{a = -\frac{1}{2}}$$

Ainsi $g(x) = -\frac{1}{2}x + b$

2. Calculons b : g(3) = 1 donc g(3) = $-\frac{1}{2} \times 3 + b = 1$ donc $-\frac{3}{2} + b = 1$

Donc $b = 1 + \frac{3}{2} = \frac{2}{2} + \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$

3. Ainsi $g(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$